GRUPUL PERIOADELOR UNEI FUNCŢII PERIODICE

Prof. Maşala Oana-Maria

Colegiul Naţional „Costache Negri”, Tg. Ocna, Jud. Bacău

O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *este periodică dacă* $\exists\, T\in\mathbb{R}^*$ *astfel încât* $f(x+T)=f(x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}$, T *numindu-se perioada funcţiei* f. *Dacă printre perioadele strict pozitive ale funcţiei* f *există un cel mai mic* T_0 *(perioada principală), atunci orice perioadă* T *este de forma* $T=kT_0,\ k\in\mathbb{Z}$. *Cu* H_f *se notează mulţimea tuturor perioadelor funcţiei* f.

$(H_f,\ +)$ *este un subgrup al grupului* $(\mathbb{R},\ +)$.

1) $\forall\, T_1,\ T_2\in H_f\Rightarrow T_1+T_2\in H_f$: într-adevăr, luând $T_1,\ T_2$ din H_f, atunci

$$f\left(x+(T_1+T_2)\right)=f\left(\underbrace{(x+T_1)}_{y}+T_2\right)=f(y+T_2)\overset{T_2\in H_f}{=}f(y)=f(x+T_1)\overset{T_1\in H_f}{=}f(x).$$

2) $\forall\, T\in H_f\Rightarrow -T\in H_f$:

fie $T\in H_f$, atunci $f(x)=f\left(x+(-T+T)\right)=f\left(\left(x+(-T)\right)+T\right)\overset{T\in H_f}{=}f\left(x+(-T)\right)$, deci $f\left(x+(-T)\right)=f(x)$, de unde rezultă că $-T\in H_f$.

3) $0\in H_f: f(x+0)=f(x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

Din 1)-3) rezultă că $(H_f,\ +)$ este un subgrup al grupului $(\mathbb{R},\ +)$.

Fie funcţiile $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin 2\pi x,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$ *şi* $g(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ *- funcţia Dirichlet. Să se arate că* $f,\ g$ *sunt periodice şi să se precizeze elementele grupurilor corespunzătoare celor două funcţii, anume* H_f *şi* H_g.

Funcţia sinus este periodică, de perioadă principală $T_0=2\pi$. Determinăm perioada principală pentru funcţia dată $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin 2\pi x$:

$$f(x+T)=\sin 2\pi(x+T)=\sin\left(\underbrace{2\pi x}_{y}+\underbrace{2\pi T}_{T'}\right)=\sin(y+T')=\sin y\Leftrightarrow T'=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

deoarece funcţia sinus este periodică şi orice perioadă a sa are forma $T'=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Atunci $T'=2k\pi\Leftrightarrow 2\pi T=2k\pi\Rightarrow T=k,\ k\in\mathbb{Z}$. Înseamnă că $H_f=\mathbb{Z}$ şi $T_0=1$. Funcţia g este periodică, întrucât luând, de exemplu, $T=1$, se obţine $g(x+1)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, deoarece dacă $x\in\mathbb{Q}$ avem că $x+1\in\mathbb{Q}$ şi

$g(x+1)=1=g(x)$, iar dacă $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci $x+1 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, urmând ca $g(x+1)=0=g(x)$. Deci $T=1$ este perioadă pentru funcţia g.

Fie $T \in \mathbb{Q}$, atunci $x+T \in \mathbb{Q}$ dacă $x \in \mathbb{Q}$ şi $x+T \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dacă $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Obţinem $g(x+T)=1=g(x)$, dacă $x \in \mathbb{Q}$ şi $g(x+T)=0=g(x)$, dacă $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Deci, $g(x+T)=g(x),\ x \in \mathbb{R}$. Urmează că $\mathbb{Q} \subset H_g$.

Fie $T \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $T \in H_g \Leftrightarrow g(x+T)=g(x),\ x \in \mathbb{R}$. Acest lucru nu se întâmplă niciodată, deoarece luând $x=-T$, avem $g(x)=g(-T)=0$ (pentru că dacă $T \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow -T \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$). Dar $g(x+T)=g(-T+T)=g(0)=1 \neq g(x)=0$. Deci, $\forall\ T \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\exists\ x \in \mathbb{R}$ astfel încât $g(x+T) \neq g(x)$. Prin urmare, nici un număr iraţional nu este perioadă a funcţiei g. În concluzie $H_g = \mathbb{Q}$.

Bibliografie

1. Ion D. Ion, Nicolae Radu, *Algebră,* EDP, Bucureşti, 1975
2. Dragomir A., Dragomir P., *Structuri algebrice,* Editura Facla, Cluj Napoca, 1981
3. Ion D. Ion, Nicolau R., *Algebră,* EDP, Bucureşti, 1981
4. Ion D. Ion, Niţă C., *Probleme de algebră,* EDP, 1981
5. C. Năstăsescu, C. Niţă, *Bazele algebrei,* Editura Academiei, Bucureşti, 1986